

Eesti LXXI matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
11. jaanuaril 2024. a. Tallinnas
X klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Peremees Andres palkas neljaks nädalaks heinatöödele sulase Madise. Kohe lepiti kokku ka palga suurus. Iga tööpäeval lõpus sai Madis teatud osa sellest kokkulepitud palgast. Esimesel nädalal sai ta veerandi kogu palgast. Teisel nädalal sai Madis esimesel nädalal saadud palgast 10% võrra suurema tasu. Kolmandal nädalal saadud palk moodustas 60% kahel esimesel nädalal saadud palgadest kokku. Viimasel nädalal maksis Andres välja viimase osa esialgu kokkulepitud palgast ja lisas sellele preemiaks ka mõned sendid, mis moodustasid 1% alguses kokkulepitud palgast. Kokku sai Madis neljandal nädalal 3 krooni ja 40 senti. Kui suur oli esialgne kokkulepitud palk? (1 kroon = 100 senti)
2. Olgu m selline positiivne täisarv, et võrrandil $m^2 - x(x + 1) = 212$ on kaks erinevat täisarvulist lahendit. Leidke kõik võimalikud parameetri m väärtused
3. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurga BAC poolitajal kolmnurga sees asub punkt D , millest kaatetile AC tõmmatud ristlõigu DE otspunkt E asub kaatetil AC . Seejuures on nurk ADE seitse korda suurem nurgast DBC . Tõestage, et kolmnurk ADB on võrdhaarne parajasti siis, kui $\angle ADB = 126^\circ$.
4. Naturaalarve võib jagada paarisarvudeks ja paarituteks arvudeks. Mida võib kummalgi juhul öelda naturaalarvude m ja n paarsuse kohta, kui
 - a) $m^2 + n^2$ annab jagamisel arvuga 4 jäägi 2;
 - b) $m^2 - n^2$ annab jagamisel arvuga 4 kas jäägi 1 või 3?Põhjendage oma väiteid.
5. Juku teeb järgmise kaarditriki: ta laseb Maril Juku teadmata valida 27 kaardi seast ühe, selle meelde jätta ja pakki tagasi panna, paki läbi segada ja Jukule anda. Juku võtab Mari poolt segatud 27 kaardiga paki ja laob kaardid kordamööda kolme hunnikusse, kaarte Marile näidates. Seejärel palub ta Maril öelda, millisesse hunnikusse sattus Mari valitud kaart. Juku tõstab seejärel hunnikud nii kokku, et Mari valitud kaardiga hunnik jääb keskmiseks. Saadud suure pakiga hakkab Juku uuesti Marile kaarte näidates kaarte kordamööda kolme hunnikusse laduma. Seejärel palub ta taas Maril öelda, millisesse hunnikusse Mari valitud kaart sattus ja tõstab hunnikud kokku nii, et Mari valitud kaardiga hunnik jääb keskmiseks. Saadud suure pakiga hakkab Juku kolmandat korda Marile kaarte näidates kaarte kordamööda kolme hunnikusse laduma. Taas palub ta Maril öelda, millisesse hunnikusse tema valitud kaart sattus ja tõstab hunnikud kokku nii, et Mari valitud kaardiga hunnik jääb keskmiseks. Kas Jukul on selle informatsiooni pealt võimalik kindlaks teha, milline oli Mari valitud kaart? Kui jah, siis mitmendal kohal tekkinud pakis on Mari valitud kaart? Põhjendage!